Московский Политех

VI Всероссийская студенческая командная олимпиада по математике

19 марта 2023

Старшие курсы

1. Пусть A и B – две квадратные матрицы порядка n, такие что для любой квадратной матрицы C такого же порядка найдется решение X и Y матричного уравнения $AX + YB = C$. Докажите, что в этом случае, для любой матрицы C матричное уравнение $A^{2023}X + YB^{2023} = C$ тоже имеет решение.
2. Найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!2^n} \cos \frac{\pi n - 1}{2}$.
3. Докажите, что комплексное число z удовлетворяет условию $|z| - \operatorname{Re} z \le \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда найдутся такие комплексные u и v, что $z = uv$ и $|u - \overline{v}| \le 1$.
4. Вычислите $\left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \right) : \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \right)$
5. Три угла семиугольника, вписанные в окружность равны 120°. Докажите, что хотя бы две его стороны равны.
6. Решите уравнение: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{x^2 + \ldots \sqrt{x^n}}}} = 2$.
7. Докажите, что уравнение $y' - (2 + \cos x) y = \operatorname{arctg} x$ имеет единственное ограниченное на R решение в классе C^1.
8. В правильном треугольнике ABC со стороной a, $a > 0$, наугад выбирается точка M. Найти функцию распределения случайной величины, равной площади треугольника AMC. Построить график этой функции распределения.