

Московский Политех

VI Всероссийская студенческая командная олимпиада по математике

19 марта 2023

1 курс

1. Пусть матрица A – квадратная матрица 2023 порядка и пусть $a_{ij} = \operatorname{tg}(i - j)$.

Найдите определитель этой матрицы.

2. Пусть A и B — две квадратные невырожденные матрицы одинакового порядка. Докажите, что справедливо следующее равенство:

$$(A + AB^{-1}A)^{-1} + (A + B)^{-1} = A^{-1}$$

3. Решите систему:

$$\begin{cases} x + xy + xyz = 12; \\ y + yz + yzx = 21; \\ z + zx + zxy = 30. \end{cases}$$

4. Пусть $O = (0, 0)$ и $Q = (1, 0)$. Найдите точку P на прямой с уравнением $y = x + 1$, для которого угол OPQ максимален.

5. Три угла семиугольника, вписанные в окружность равны 120° . Докажите, что хотя бы две его стороны равны.

6. Решите уравнение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{x^2 + \dots \sqrt{x^n}}}} = 2$.

7. Найти $\int \frac{(x-1)^2 dx}{x^2 + e^x + 1}$.

8. Найдите глобальный максимум функции $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}$, $x \in R$.