1. Найти A^n, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

Имеем блочно-диагональную матрицу $A=\begin{pmatrix} D & O \\ O & B \end{pmatrix}$, где $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, O – нулевая, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Т.к. $A^n=\begin{pmatrix} D^n & O \\ O & B^n \end{pmatrix}$, то найдем степени матриц D и B.

Матрица $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - верхнетреугольная матрица. Для нее при помощи метода математической индукции элементарно доказывается, что $D^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем B^n:

<u>*1 способ:*</u>

Попробуем диагонализировать B.

Найдем собственные значения:

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^3,$$ т.е. матрица недиагонализируема, т.к. собственное значение $\lambda=2$ имеет кратность 3.

Тогда приведем матрицу к нормальной жордановой форме. Определим число клеток Жордана по формуле $m = n - rang(A - \lambda E) = 3 - 1 = 2$. Тогда с точностью до перестановок клеток Жордана жорданова нормальная форма будет иметь вид:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы найдем решив систему $\left(B - \lambda E\right) X = O$. Фундаментальная система решений которой имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - собственные векторы (уравнения системы получаемые из столбцов 1 и 3 матрицы J. Для построения жорданова базиса нужен еще один присоединенный вектор. Возьмем, например, присоединенный вектор $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тогда $e_1 = \left(B - \lambda E\right) f_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. В результате получим жорданов базис $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $e_2 = f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда матрица перехода будет иметь вид: $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Для матрицы $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ методом математической индукции легко доказать, что

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$ тогда

$$B^n = C \cdot J^n \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2^n\left(n-1\right) & n \cdot 2^n & 0 \\ -2^n \cdot 2n & 2^n\left(n+1\right) & 0 \\ -n \cdot 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

2 способ:

Возводя матрицу $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$ последовательно в степень 2, 3 и т.д. найдем зависимость:

$B^2=\begin{pmatrix}-4&4&0\\-16&12&0\\-8&4&4\end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix}-16&12&0\\-48&32&0\\-24&12&8\end{pmatrix}$, $B^4=\begin{pmatrix}-48&32&0\\-128&80&0\\-64&32&16\end{pmatrix}$. Увидим закономерность (что достаточно трудно):

$B^n=\begin{pmatrix}-2^n(n-1)&n\cdot 2^n&0\\-2^n\cdot 2n&2^n(n+1)&0\\-n\cdot 2^n&n\cdot 2^{n-1}&2^n\end{pmatrix}$. Докажем ее с использованием ММИ.

Ответ:

$$A=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n^2+n}{2}&0&0&0\\0&1&n&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-2^n(n-1)&n\cdot 2^n&0\\0&0&0&-2^n\cdot 2n&2^n(n+1)&0\\0&0&0&-n\cdot 2^n&n\cdot 2^{n-1}&2^n\end{pmatrix}$$

2. Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1^k+2^k+\ldots+n^k\right)n}{1^{k+1}+2^{k+1}+\ldots+n^{k+1}}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1^k+2^k+\ldots+n^k\right)n}{1^{k+1}+2^{k+1}+\ldots+n^{k+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\cdot\frac{n\cdot n^{k+1}}{1^{k+1}+2^{k+1}+\ldots+n^{k+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{k+1}+2^{k+1}+\ldots+n^{k+1}}{n^{k+2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^k\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{n}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{k+1}\cdot\dfrac{1}{n}\right)}$$

Оба полученных предела являются интегральными суммами функции $f(x)=x^k$ (первый предел) и $f(x)=x^{k+1}$ (второй предел), при $x\in[0;1]$, тогда получим:

$$\int_0^1 x^k dx\cdot\frac{1}{\int\limits_0^1 x^{k+1}dx}=\left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1:\left.\frac{x^{k+2}}{k+2}\right|_0^1=\frac{k+2}{k+1}.$$

3. Вычислить $\int \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Решение:

Обозначим $I_1 = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ и $I_2 = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

$$I_1 = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+x^2} d\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right) =$$

$$= \sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} - I_2 .$$

Имеем: $I_1 + I_2 = \sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x}$. Теперь рассмотрим

$$I_2 = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{x\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \int x\sqrt{1+x^2} d\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right) =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} - \int x\sqrt{1+x^2} d\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right) =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} - \int \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \right) e^{\operatorname{arctg} x} dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} - \int \sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} dx - \int \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x} dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{\left(1+x^2\right) e^{\operatorname{arctg} x} dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x} dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{\sqrt{1+x^2}} - 2\int \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x} dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} - I_1 - 2\int \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x} dx}{\sqrt{1+x^2}} .$$

Тогда $\int \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x} dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} - \left(I_1 + I_2\right)}{2} = \frac{\left(x-1\right)\sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x}}{2} + C$

4. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1} dx$.

Решение:

Попробуем «свести интеграл к самому себе», то есть получить уравнение относительно искомого интеграла. При этом используем тригонометрические формулы, связывающие арктангенс с самой «родственной» ему обратной тригонометрической функцией — арккотангенсом:

$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arcctg} \frac{1}{a}, \quad a \neq 0, \quad a \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{1/3}^{3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1}\, dx = \int_{1/3}^{3} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x}{x^2 - x + 1}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{1/3}^{3} \frac{1}{x^2 - x + 1}\, dx - \int_{1/3}^{3} \frac{\operatorname{arcctg} x}{x^2 - x + 1}\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{Первый интеграл вычисляется (это интеграл, содержащий квадратный трёхчлен).} \\ \text{Во втором интеграле делаем замену } x = 1/t \text{ (чтобы получить арктангенс).}\end{array}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{1/3}^{3} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx - \int_{3}^{1/3} \frac{\operatorname{arcctg} \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1} \left(-\frac{1}{t^2}\right)\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \Bigg|_{1/3}^{3} - \int_{1/3}^{3} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2 - t + 1}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1}\, dx.$$

Из полученного уравнения легко находится искомый интеграл. Выражение в круглых скобках из последней формулы может быть преобразовано к $\operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$, если воспользоваться формулой $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a+b}{1-ab}$, справедливой при $ab < 1$ (здесь $ab = \frac{5}{9} < 1$).

Ответ: $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}.$

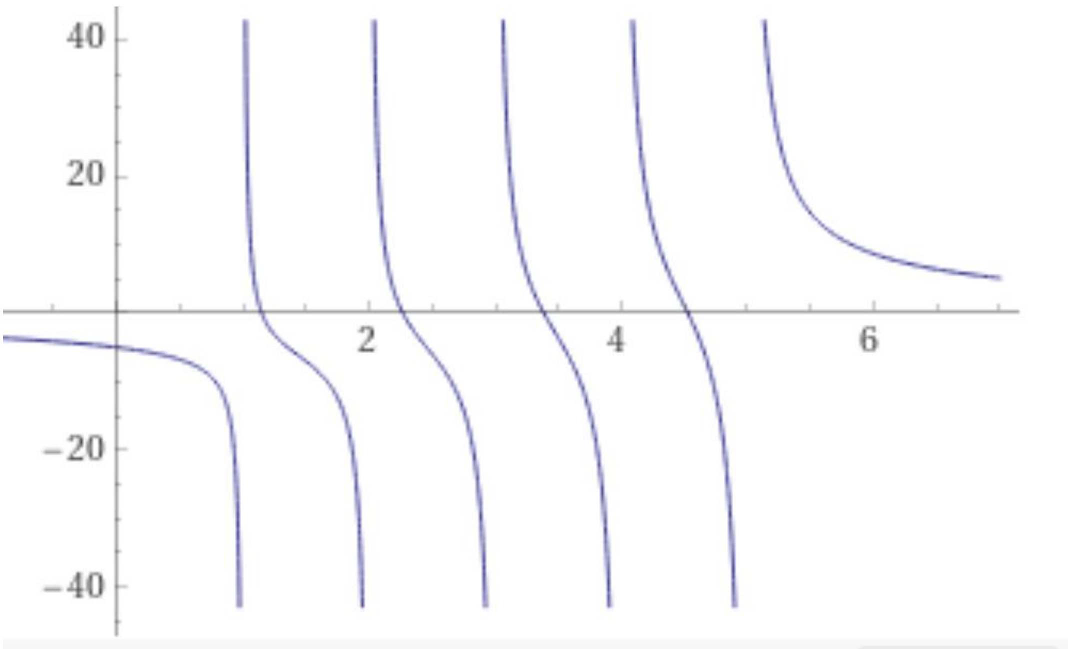
5. Доказать, что уравнение $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\ldots+\frac{2021}{x-2021}=0$ имеет только действительные решения.

Решение:

Если привести выражение в правой части к общему знаменателю, то в числителе будет многочлен 2020 степени, следовательно, число корней не более 2020.

Введем функцию $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\ldots+\frac{2021}{x-2021}$, т.е. $f(x)=\sum_{n=1}^{2021}\frac{n}{x-n}$.

Т.к. $f'(x)=-\sum_{n=1}^{2021}\frac{n}{(x-n)^2}<0$ при любых x, то $f(x)$ убывает на ОДЗ. Точки $x_i=i,\ i=1,\ldots,2021$ - точки разрыва второго порядка, причем для любого $i=1,\ldots,2021$ $\lim\limits_{x\to i-0} f(x)=-\infty$, а $\lim\limits_{x\to i+0} f(x)=+\infty$, а во всех остальных точках функция непрерывна. С учетом того, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, то график функции будет иметь вид:



Тогда данная функция имеет 2020 действительных корней (между вертикальными асимптотами, которых 2021 штука), а поскольку всего корней не более 2020, то получается, что все они действительные.

6. Найдите $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(y_1(x)-y_2(x)\right)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ различные решения дифференциального уравнения $y'''-7y''+25y'-39y=\sqrt{1+x^2}e^{\operatorname{arctg}x}$.

Решение:

Т.к. по теореме о структуре решения неоднородного уравнения $y=y_{однор.}+y_{частн.}$, то $y_1(x)-y_2(x)=y_{однор.}$

Характеристический многочлен:

$k^3-7k^2+25k-39=0$

Подбираем $k_1=3$, тогда $k^3-7k^2+25k-39=\left(k-3\right)(k^2-4k+13)$, откуда $k_{2,3}=2\pm3i$.

Получим $y_{однор.}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}\cos3x+C_3e^{2x}\sin3x$, где $C_1,\ C_2,\ C_3$ - произвольные постоянные. Тогда $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(y_1(x)-y_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(C_1e^{3x}+C_2e^{2x}\cos3x+C_3e^{2x}\sin3x\right)=0$

7. Найдите многочлен $f(x)$ наибольшей степени такой, чтобы для некоторых многочленов с вещественными коэффициентами выполнялось

$$x^{2022}-1=f(x)\cdot g(x) \text{ и } x^{2025}-1=f(x)\cdot h(x).$$

Решение:

Корни многочлена $x^{2022}-1$ имеют вид $z=e^{i\frac{2\pi k}{2022}}$, $k=0,1,...,2021$. Корни $x^{2025}-1$ имеют вид $z=e^{i\frac{2\pi k}{2025}}$, $k=0,1,...,2024$.

Т.к. $2022=2\cdot 3\cdot 337$, а $2025=3^4\cdot 5^2$, то НОД этих чисел 3. Тогда общими корнями будут корни вида $z=e^{i\frac{2\pi k}{3}}$, т.е. это корни: $z_0=1$ (при $k=0$), $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (при $k=1$) и $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (при $k=2$). Тогда

$$f(x)=(x-1)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=x^3-1.$$

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2(2n+1)}$.

Решение:

Сведем ряд к рядам с известными суммами или рядам, в которых суммы легко считаются. Знаменатель $(2n-1)^2$ может указывать на ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, а произведение $(2n-1)(2n+1)$ в знаменателе на разность $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, тогда сделаем преобразование выражения, стоящего под знаком суммы:

$$\frac{2}{(2n-1)^2(2n+1)}=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)^2(2n+1)}=\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\text{, тогда}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ - известная сумма ряда, которая получается, например, из разложения в ряд Фурье функции $f(x)=x$ на $[0;\pi]$ по косинусам:

$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+...\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. Подставив $x=0$, получим уравнение $0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, откуда и следует данное равенство.

Найдем сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}$ известным способом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right).$$

Найдем $S_n=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$, тогда

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$.

9. На плоскости, замощённой одинаковыми прямоугольниками со сторонами 10 и 20 см (прямоугольники примыкают друг к другу сторонами с равными длинами), наугад рисуют окружность радиусом 4 см. Какова вероятность того, что окружность пересечёт ровно три прямоугольника?

Решение:

На рис. 1 показаны возможные расположения окружности; числа внутри окружностей показывают, сколько прямоугольников каждая из нарисованных окружностей пересекает.

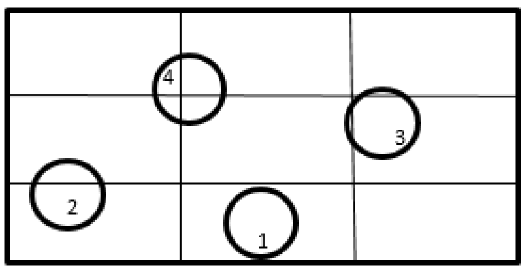


Рис. 1

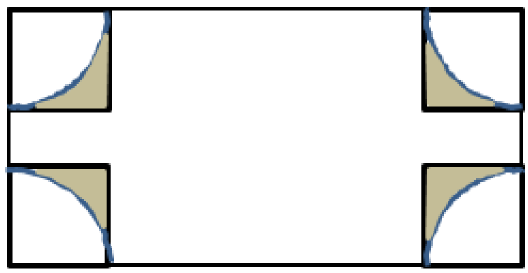


Рис. 2

Положение окружности на плоскости полностью определяется её центром (при фиксированном радиусе). Поэтому наугад нарисовать окружность равносильно выбору случайной точки для её центра. Поскольку эта точка с равными шансами может оказаться в любом месте, то применимо геометрическое определение вероятности. Так как точка обязательно окажется в случайно выбранном месте како-либо прямоугольника, то можно ограничиться рассмотрением одного прямоугольника и положения точки в нём.

Чтобы окружность пересекала ровно три прямоугольника (см. положение 3 на рис. 1), должны выполняться два условия. Первое: расстояние от центра до двух смежных сторон прямоугольника должно быть меньше 4 см (центр попадает в какой-либо из четырёх квадратов со стороной 4 см, расположенных в углах прямоугольника на рис. 2). Второе: расстояние до ближайшей вершины прямоугольника должно быть меньше 4 см (центр находится вне окружностей радиусом 4 см с центром в вершинах прямоугольника). В итоге, центр окружности должен оказаться в областях, отмеченных серым цветом на рис. 2.

Искомую вероятность находим с помощью геометрического определения (площадь выделенной области делим на площадь прямоугольника):

$$\frac{4\left(4\cdot 4-\frac{1}{4}\pi 4^2\right)}{10\cdot 20}=\frac{4(4-\pi)}{10\cdot 5}=\frac{2(4-\pi)}{25}.$$

Ответ: $\frac{2(4-\pi)}{25}$.

10. Найти математическое ожидание количества неподвижных точек при случайной перестановке нескольких элементов.

Решение:

Пусть имеется n (то самое несколько) расположенных в ряд элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (которые можно рассматривать как конечную последовательность). Делается их случайная перестановка $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, где $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_j \neq i_k$ при $j \neq k$. Тогда оставшиеся на своих местах элементы называются неподвижными точками.

Рассмотрим случайные величины ξ_j — индикаторы неподвижности для каждого места:

$$\xi_j = \begin{cases} 1, \text{ если } i_j = j, \\ 0, \text{ если } i_j \neq j \end{cases}$$

($\xi_j = 1$, если в результате перестановки элемент a_j остался на своём месте, и $\xi_j = 0$ в противном случае; $j = 1, 2, \ldots, n$). Тогда случайная величина ξ, равная общему количеству неподвижных точек, может быть представлена в виде суммы таких индикаторов, а её математическое ожидание будет равно сумме их математических ожиданий (в силу линейности математического ожидания):

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n, \qquad \mathrm{M}\xi = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2 + \cdots + \mathrm{M}\xi_n.$$

Найдём математическое ожидание индикатора. Ряд распределения индикатора будет иметь вид

ξ_j	0	1
p	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Вероятность того, что $\xi_j = 1$ (j-й элемент останется на своём месте) равна $1/n$, так как всего перестановок $n!$, а при фиксации -го элемента их $(n-1)!$; $(n-1)!/n! = 1/n$. В итоге

$$\mathrm{M}\xi_j = 0 \cdot \mathrm{P}(\xi_j = 0) + 1 \cdot \mathrm{P}(\xi_j = 1) = \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{M}\xi = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ слагаемых}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Ответ: 1.