1. Доказать, что у целочисленной квадратной матрицы вещественные собственные значения могут быть или целыми, или иррациональными.

Решение:

Рассуждаем от противного. Пусть p/q — рациональное, но не целое ($p/q \notin \mathbb{Z}$) собственное значение некоторой целочисленной квадратной матрицы $A = \{a_{ij}\}$ порядка n; здесь p, q — целые числа (принадлежат $\mathbb{Z}$), $q \neq 1$, причём дробь p/q можно считать несократимой.

Собственные значения λ определяются из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то есть являются корнями многочлена $(-1)^n\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$. Подставим сюда (предполагаемое собственным) значение $\lambda = p/q$, что приведёт к верному числовому равенству:

$$(-1)^n\left(\frac{p}{q}\right)^n + c_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^1 + c_n = 0.$$

Домножим теперь обе части этого равенства на q^{n-1}:

$$(-1)^n\frac{p^n}{q} + c_1p^{n-1} + \cdots + c_{n-1}pq^{n-2} + c_nq^{n-1} = 0.$$

В последнем верном числовом равенстве все слагаемые, кроме первого, являются целыми. Значит, целым числом должна быть и дробь p^n/q, а вместе с ней и дробь p/q, что противоречит предположению $p/q \notin \mathbb{Z}$.

2. Доказать, что никакая квадратная матрица нечётного порядка, элементами которой являются вещественные числа, не может быть решением матричного уравнения $X^2 = -E$, где E — единичная матрица.

Решение:

Способ I (основан на свойствах матриц и определителей).

Пусть такая матрица X существует.

Из условия следует, что должно выполняться следующее равенство для определителей: $\det(X^2) = \det(-E)$. По теореме умножения определителей ($|AB| = |A||B|$) имеем $\det(X^2) = \det X \cdot \det X = (\det X)^2 \geq 0$. Так как $\det E = 1$, то $\det(-E) = (-1)^n$, то есть при нечётном n (n — порядок матрицы) $\det(-E) = -1$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Способ II (основан на знании линейной алгебры: собственные числа и собственные векторы).

Пусть такая матрица X существует.

Характеристический многочлен $\det(X - \lambda E)$ матрицы X представляет собой многочлен степени n с вещественными коэффициентами (n — порядок матрицы). Поскольку любой многочлен нечётной степени с вещественными коэффициентами обязательно имеет хотя бы один вещественный корень, то матрица X имеет по крайней мере одно вещественное собственное значение λ_0. Пусть v_0 — отвечающий значению λ_0 собственный вектор, то есть $Xv_0 = \lambda_0 \cdot v_0$, $v_0 \neq 0$.

В силу условия должно выполняться равенство $X^2 v_0 = -Ev_0 \iff X^2 v_0 + Ev_0 = 0$. Так как $X^2 v_0 = X(Xv_0) = X(\lambda_0 v_0) = \lambda_0 \cdot Xv_0 = \lambda_0 \cdot \lambda_0 v_0 = \lambda_0^2 v_0$ и $Ev_0 = v_0$, то $(\lambda_0^2 + 1)v_0 = 0$. Но при ненулевом векторе v_0 последнее равенство может выполняться только при $\lambda_0^2 + 1 = 0$, что невозможно ни при каком вещественном λ_0. Полученное противоречие решает задачу.

3. Найти A^n, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

Имеем блочно-диагональную матрицу $A=\begin{pmatrix} D & O \\ O & B \end{pmatrix}$, где $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, O – нулевая, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Т.к. $A^n=\begin{pmatrix} D^n & O \\ O & B^n \end{pmatrix}$, то найдем степени матриц D и B.

Матрица $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$- верхнетреугольная матрица. Для нее при помощи метода математической индукции элементарно доказывается, что $D^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем B^n:

1 способ:

Попробуем диагонализировать B.

Найдем собственные значения:

$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^3$, т.е. матрица недиагонализируема, т.к. собственное значение $\lambda=2$ имеет кратность 3.

Тогда приведем матрицу к нормальной жордановой форме. Определим число клеток Жордана по формуле $m = n - rang(A - \lambda E) = 3 - 1 = 2$. Тогда с точностью до перестановок клеток Жордана жорданова нормальная форма будет иметь вид:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы найдем решив систему $\left(B - \lambda E\right) X = O$. Фундаментальная система решений которой имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - собственные векторы (уравнения системы получаемые из столбцов 1 и 3 матрицы J. Для построения жорданова базиса нужен еще один присоединенный вектор. Возьмем, например, присоединенный вектор $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тогда $e_1 = \left(B - \lambda E\right) f_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. В результате получим жорданов базис $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $e_2 = f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда матрица перехода будет иметь вид: $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Для матрицы $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ методом математической индукции легко доказать, что

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$ тогда

$$B^n = C \cdot J^n \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2^n \left(n - 1\right) & n \cdot 2^n & 0 \\ -2^n \cdot 2n & 2^n \left(n + 1\right) & 0 \\ -n \cdot 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

2 способ:

Возводя матрицу $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ последовательно в степень 2, 3 и т.д. найдем зависимость:

$B^2=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -16 & 12 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix} -16 & 12 & 0 \\ -48 & 32 & 0 \\ -24 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, $B^4=\begin{pmatrix} -48 & 32 & 0 \\ -128 & 80 & 0 \\ -64 & 32 & 16 \end{pmatrix}$. Увидим закономерность (что достаточно трудно):

$B^n=\begin{pmatrix} -2^n(n-1) & n\cdot 2^n & 0 \\ -2^n\cdot 2n & 2^n(n+1) & 0 \\ -n\cdot 2^n & n\cdot 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$. Докажем ее с использованием ММИ.

Ответ:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2^n(n-1) & n\cdot 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2^n\cdot 2n & 2^n(n+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n\cdot 2^n & n\cdot 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) известны координаты вершины B(3;5) и уравнение прямой AC: x-2y+12=0. Найти уравнения боковых сторон, если площадь треугольника 15 кв.ед.

Решение:

Проведем высоту BD и найдем координаты точки D.

Уравнение AC: $y=\frac{1}{2}x+6$, тогда, т.к. BD перпендикулярна AC, то $k_{BD}=-\frac{1}{k_{AC}}=-2$.

BD, проходит через B, тогда уравнение BD: $y-5=-2(x-3)$.

Координаты D найдем из пересечения AC и BD, т.е. D(2,7).

Тогда длина $BD=\sqrt{(3-2)^2+(5-7)^2}=\sqrt{5}$.

С учетом того, что площадь треугольника 15 найдем, что $AC=\frac{30}{\sqrt{5}}$.

Точки A и C лежат на прямой AC. С другой стороны A и C лежат на окружности с центром в точке D и радиусом, например AD, который равен половине AC. Тогда получим систему в которой x и y это координаты точек A и C:

$$\begin{cases} x-2y+12=0; \\ (x-2)^2+(y-7)^2+45. \end{cases}$$

Решая ее получим пары (-4;4) и (8;10) – координаты точек (пусть первая будет A, вторая C).

Уравнения боковых сторон найдем как уравнения прямых, проходящих через две точки.

Ответ: $x-y+2=0$, $x-7y+32=0$

5. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, где $x_0 = -1,5$, $x_n = \frac{1}{6}x_{n-1}^2(x_{n-1}-1)$, $n \geq 1$

Решение:

Сначала докажем, что последовательность имеет предел.

Из формул видно, что $x_n < 0$ при всех n, а значит, последовательность ограничена сверху. Для проверки возрастания сравним x_n и x_{n+1}:

$$x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}x_n^2(x_n - 1) - x_n > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}x_n(x_n^2 - x_n - 6) > 0.$$

Последнее неравенство будет верным, если $-2 < x_n < 0$ или $x_n > 3$. По доказанному выше все члены последовательности отрицательны. Так как $-2 < x_0 < 0$ (по условию), то, во-первых, $x_1 > x_0$, а во-вторых, $-2 < x_1 < 0$. Рассуждаю аналогично, получим, что $x_2 > x_1$, $x_3 > x_2$, …, $x_{n+1} > x_n$.

Таким образом, данная последовательность имеет предел в соответствии с теоремой Вейерштрасса (всякая монотонно возрастающая (убывающая) ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет предел). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Чтобы найти a, перейдём к пределу в рекуррентном соотношении:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}x_{n-1}^2(x_{n-1} - 1) = \frac{1}{6}a^2(a-1).$$

Отсюда следует, что пределом может быть одно из чисел $a = 0$, $a = -2$, $a = 3$. Для данной последовательности возможно только первое значение.

Ответ: 0.

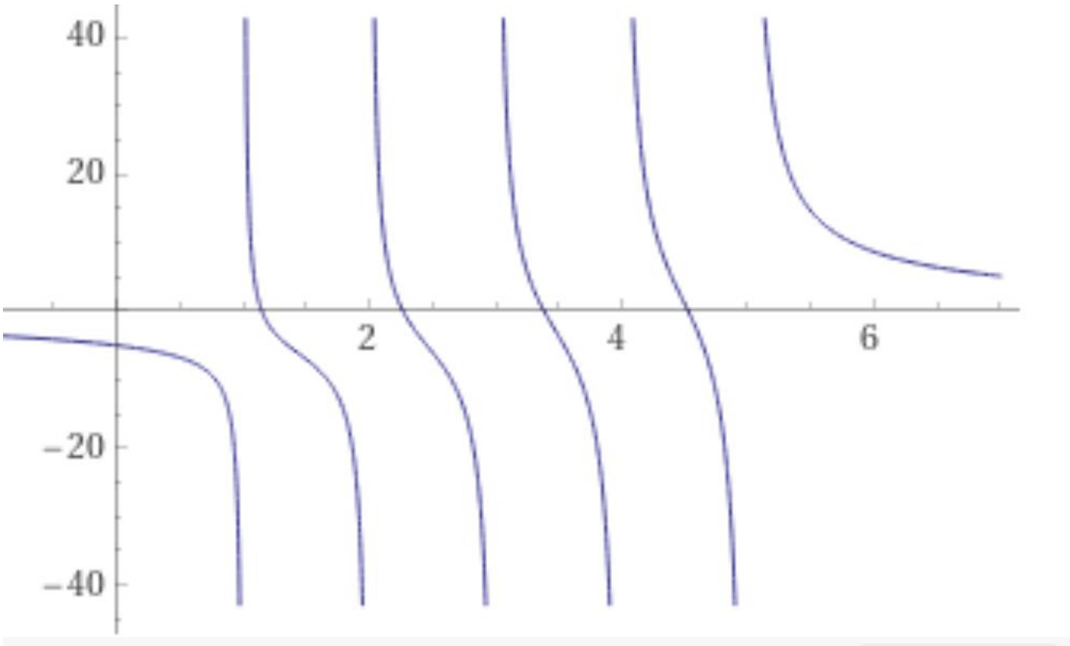
6. Доказать, что уравнение $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+...+\frac{2021}{x-2021}=0$ имеет только действительные решения.

Решение:

Если привести выражение в правой части к общему знаменателю, то в числителе будет многочлен 2020 степени, следовательно, число корней не более 2020.

Введем функцию $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+...+\frac{2021}{x-2021}$, т.е. $f(x)=\sum_{n=1}^{2021}\frac{n}{x-n}$.

Т.к. $f'(x)=-\sum_{n=1}^{2021}\frac{n}{\left(x-n\right)^2}<0$ при любых x, то $f(x)$ убывает на ОДЗ. Точки $x_i=i,\ i=1,...,2021$ - точки разрыва второго порядка, причем для любого $i=1,...,2021$ $\lim\limits_{x\to i-0} f(x)=-\infty$, а $\lim\limits_{x\to i+0} f(x)=+\infty$, а во всех остальных точках функция непрерывна. С учетом того, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, то график функции будет иметь вид:



Тогда данная функция имеет 2020 действительных корней (между вертикальными асимптотами, которых 2021 штука), а поскольку всего корней не более 2020, то получается, что все они действительные.

7. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + n x_n}$. Найти формулу общего члена последовательности

Решение:

Преобразуем формулу для x_{n+1} так, чтобы x_n в неё входил только один раз:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n x_n} = \frac{1}{\frac{1}{x_n} + n}.$$

Теперь видно, что ситуацию упрощает переход к обратным величинам. Пусть $y_n = x_n^{-1}$. Тогда

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n + n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + n.$$

Поскольку $y_0 = x_0^{-1} = 1$, то получаем

$$y_1 = y_0 + 1; \quad y_2 = y_1 + 2 = y_0 + 1 + 2; \quad y_3 = y_2 + 3 = y_0 + 1 + 2 + 3; \ldots$$

$$y_n = y_0 + 1 + 2 + \cdots + n = y_0 + \frac{1+n}{2} \cdot n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2 + n(n+1)}{2},$$

откуда

$$x_n = \frac{1}{y_n} = \frac{2}{2 + n(n+1)}.$$

Ответ: $x_n = \frac{2}{2+n(n+1)}$.

8. Доказать, что многочлен от одной переменной с вещественными коэффициентами, принимающий при всех вещественных значениях аргумента только положительные значения, может быть представлен в виде суммы квадратов многочленов с вещественными коэффициентами.

Решение:

Поскольку данный многочлен $P(x)$ не имеет вещественных корней (по условию $P(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$), то он имеет исключительно комплексные корни, причём (в силу вещественности коэффициентов) они комплексно-сопряжённые.

Пусть этими корнями являются пары комплексных чисел $\{z_k, \bar{z}_k\}_{k=1}^{m}$. Тогда

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - z_k)(x - \bar{z}_k) = \prod_{k=1}^{m} (x^2 - x(z_k + \bar{z}_k) + z_k\bar{z}_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{m} (x^2 + b_k x + c_k),$$

где числа $b_k \equiv -(z_k + \bar{z}_k) = -2\,\mathrm{Re}\, z_k$ и $c_k \equiv z_k\bar{z}_k = |z_k|^2 \geq 0$ являются вещественными.

Выделим в каждом получившемся множителе (квадратном трёхчлене) полный квадрат. Получим

$$x^2 + b_k x + c_k = (x + p_k)^2 + q_k,$$

где числа p_k и q_k являются вещественными, а сверх того $q_k > 0$, так как иначе квадратный трёхчлен $x^2 + b_k x + c_k$ (а вместе с ним и многочлен $P(x)$) имел бы вещественный корень, что противоречит условию. Следовательно,

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x^2 + b_k x + c_k) = \prod_{k=1}^{m} \left((x + p_k)^2 + \left(\sqrt{q_k}\right)^2\right).$$

Теперь видно, что при перемножении (раскрытии всех скобок) в правой части последнего равенства получится сумма квадратов многочленов с вещественными коэффициентами, что и требовалось доказать.