Решения старшие

1. Установить, существует ли невырожденная квадратная матрица A порядка 2021 с действительными элементами, такая, что $A^{101} + 2022A^T = O$, где O – нулевая матрица.

Решение:

Т.к. $A^{101} + 2022A^T = O$, то $A^{101} = -2022A^T$.

Тогда вычислим определители:

$$\left|A^{101}\right| = \left|-2022A^T\right|$$

$$\left|A^{101}\right| = \left(-2022\right)^{2021}\left|A^T\right|$$

Поскольку $\left|A\right| = \left|A^T\right|$, то получим

$$\left|A^{101}\right| = \left(-2022\right)^{2021}\left|A\right| \text{ или}$$

$$\left|A^{100} \cdot A\right| - \left(-2022\right)^{2021}\left|A\right| = 0.$$

Поскольку определитель произведения равен произведению определителей и определитель степени равен степени определителя, то получим

$$\left|A\right|\left(\left|A\right|^{100} - \left(-2022\right)^{2021}\right) = 0.$$

Выражение в скобках всегда положительно, тогда равенство нулю возможно только если $\left|A\right| = 0$, т.е. матрица A вырожденная.

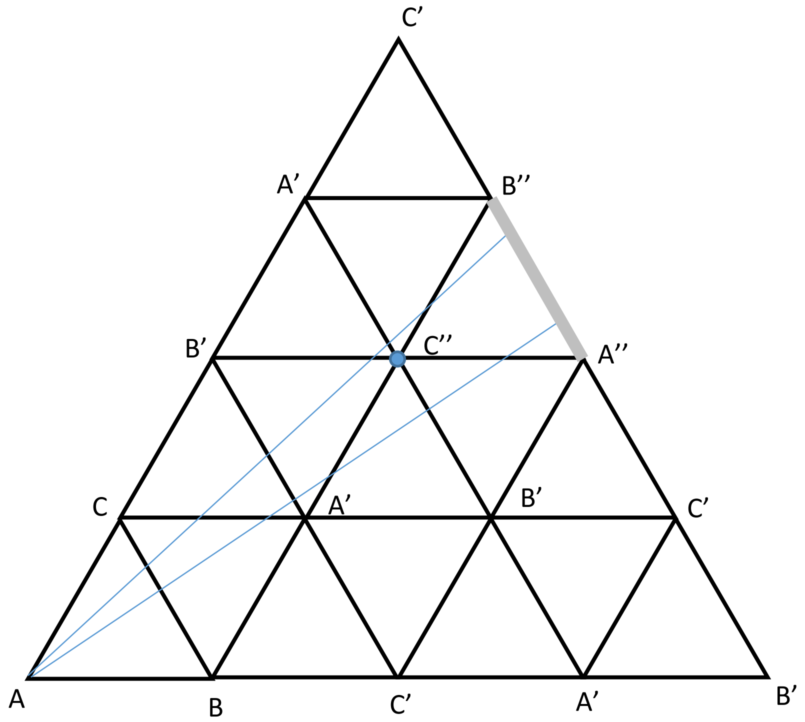
2. Задан равносторонний треугольник ABC с зеркальными сторонами. Из вершины A выходит луч под углом α к стороне AB. Найти все значения α такие что в седьмой раз луч отразится от стороны AB.

Решение:

Многократно отразим треугольник ABC симметрично относительно каждой из сторон. Тогда траектория луча станет прямолинейной. Седьмое отражение от стороны AB показано на рисунке. Тогда необходимые нам углы лежат в диапазоне $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]$, что легко получается с использованием, например теоремы Пифагора (пусть сторона большого треугольника a, тогда $AA''=\frac{a\sqrt{3}}{2}$) и из прямоугольного треугольника $AA''B''$:

$tg\varphi=\frac{A''B''}{AA''}=\frac{\frac{a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. За исключением луча, проходящего через выделенную на рисунке точку C'', для которого угол $\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{6}$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{6}\right\}$



3. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

Решение:

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n^3-1\right)}{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n^3+1\right)}=\frac{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right)}{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n+1\right)\left(n^2-n+1\right)}=$$

$$=\frac{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n-1\right)\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n^2+n+1\right)}{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n+1\right)\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n^2-n+1\right)}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)}\frac{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n^2+n+1\right)}{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n^2-n+1\right)}=$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\frac{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)}{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(n^2-n+1\right)}=\frac{2}{n(n+1)}\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)}{\left(n^2-n+1\right)}=.$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{\left(3^2-3+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(n^2-n+1\right)\cdot\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)}{\left(2^2-2+1\right)\cdot\left(3^2-3+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(n^2-n+1\right)}=.$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)}{3}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

4. Известно, что $f(x)$ определена при $x>0$ и при любых значениях переменной $f(x)>0$. Также известно, что $f(1)+f(2)=16$ и $f(a+b)=\dfrac{8f(a)+4f(b)}{3}-\sqrt{f(a)f(b)}$ при любых a и b. Найдите $f(2^{2021})$.

Решение:

Из $f(a+b)=\dfrac{8f(a)+4f(b)}{3}-\sqrt{f(a)f(b)}$ подстановкой $b=a$ получим $f(2a)=\dfrac{8f(a)+4f(a)}{3}-\sqrt{f(a)f(a)}=4f(a)-f(a)=3f(a)$.

Взяв $a=1$ получим $f(2)=3f(1)$, тогда $f(1)+f(2)=f(1)+3f(1)=4f(1)$, поскольку $f(1)+f(2)=16$, то тогда $4f(1)=16$ и $f(1)=4$.

Из соотношения $f(2a)=3f(a)$ с учетом $f(1)=4$ получим, что $f(2)=3f(1)=3\cdot 4$, $f(4)=f(2\cdot 2)=3\cdot 3\cdot 4=3^2\cdot 4$, …, $f(2^n)=3^n\cdot 4$.

Докажем эту формулу методом математической индукции.

1) База индукции доказана.
2) Пусть формула справедлива для $n=k-1$.
3) Докажем для $n=k$: $f(2^k)=f(2\cdot 2^{k-1})=3\cdot f(2^{k-1})=3\cdot\left(3^{k-1}\cdot 4\right)=3^k\cdot 4$.

Тогда $f(2^{2021})=3^{2021}\cdot 4$.

5. Пусть $y'' + y = \sin^{2021}(2\pi x)$. Найдите $\int\limits_{1941}^{1945} y(x)dx$, если $\int\limits_{0}^{1} y(x)dx = 0$, $\int\limits_{1}^{2} y(x)dx = \pi$.

Решение:

Введем функцию $z(t) = \int\limits_{t}^{t+1} y(x)dx$.

Имеем $z'(t) = y(t+1) - y(t) = \int\limits_{t}^{t+1} y'(x)dx$, далее $z''(t) = \int\limits_{t}^{t+1} y''(x)dx$.

Проинтегрируем обе части уравнения $y'' + y = \sin^{2021}(2\pi x)$ по промежутку $[t, t+1]$, получим $z'' + z = 0$, так как $\sin^{2021}(2\pi x)$ периодическая и нечетная и $\int\limits_{t}^{t+1} \sin^{2021}(2\pi x)dx = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin^{2021}(2\pi x)dx = 0$.

Решение уравнения $z'' + z = 0$ очевидно: $z = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Так как $z(0) = \int\limits_{0}^{1} y(x)dx = 0$, $z(1) = \pi$, то $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{\pi}{\sin 1}$.

$\int\limits_{1941}^{1945} y(x)dx = \int\limits_{1941}^{1942} y(x)dx + \int\limits_{1942}^{1943} y(x)dx + \int\limits_{1943}^{1944} y(x)dx + \int\limits_{1944}^{1945} y(x)dx$ или

$\int\limits_{1941}^{1945} y(x)dx = z(1941) + z(1942) + z(1943) + z(1944)$.

Подставляем и получаем

$\int\limits_{1941}^{1945} y(x)dx = \dfrac{\pi}{\sin 1}\left(\sin 1941 + \sin 1942 + \sin 1943 + \sin 1944\right)$.

6. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

Решение:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \left| \begin{array}{l} y=\frac{\pi}{2}-x, x=\frac{\pi}{2}-y \\ dx=-dy \\ x=0 \Rightarrow y=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=0 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dy}{\left(1+\operatorname{tg}^{17}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\left(1+\operatorname{ctg}^{17} y\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}+y\right)} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^{17} y}\right)\cos\left(-\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{17} y \cdot dy}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}$$

Обозначив исходный интеграл за I и записав во втором интеграле вместо y переменную x получим:

$$2I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{17} x dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right), \\ x=0\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ dt=-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)dx \\ dx=\dfrac{dt}{-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)} \end{array}\right| = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{-\left(1-t^2\right)} = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1}\right| =$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\sqrt{2}-2}{-\sqrt{2}+2}\cdot\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}+2\right)^2}{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}\right|.$$

Тогда $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1+\mathrm{tg}^{17}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}\right|$

7. Решить $y''' = y'\left(3\left(y''\right)^2 - y'y'''\right)$

Решение:

$$y''' = y'\left(3\left(y''\right)^2 - y'y'''\right)$$

$$0 = 3\left(y''\right)^2 - \left(y'\right)^2 y''' - y'''$$

$$0 = 3y'\left(y''\right)^2 - \left(y'\right)^2 y''' - y'''$$

$$0 = y'\left(y''\right)^2 + 2y'\left(y''\right)^2 - \left(1 + \left(y'\right)^2\right)y'''$$

Поделим на $\left(y''\right)^2$, проверив на особое решение $y'' = 0 \Rightarrow y = C_1x + C_2$:

$$0 = y' + \frac{2y'\left(y''\right)^2 - \left(1 + \left(y'\right)^2\right)y'''}{\left(y''\right)^2}$$

$$-y' = \left(\frac{1 + \left(y'\right)^2}{y''}\right)'$$

Проинтегрируем: $C_1 - y = \dfrac{1 + \left(y'\right)^2}{y''}$

$$C_1y'' - yy'' = 1 + \left(y'\right)^2$$

$$C_1y'' - 1 = yy'' + \left(y'\right)^2$$

$$C_1y'' - 1 = \left(yy'\right)'$$

Проинтегрируем еще раз: $C_1y' - x + C_2 = yy'$

$$C_1y' - x + C_2 = \frac{\left(y^2\right)'}{2}$$

И еще раз проинтегрируем: $C_1y - \dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_3 = \dfrac{y^2}{2}$

Ответ: $C_1y - \dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_3 = \dfrac{y^2}{2}$ и $y = C_1x + C_2$

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n}{4^n}$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$$

Воспользуемся сходимостью степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ при $x \in (-1;1)$ и тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots\right) =$$

$$= \left(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

В выражении $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ умножим обе части на x (при это область сходимости не изменится) и еще раз продифференцируем:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$, откуда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{(1+x)x}{(1-x)^3}$.

Взяв $x = \frac{1}{4}$ и воспользовавшись полученными соотношениями получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3} - \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8}{27}.$$