Решения 1 курс

1. Записано произведение 100 квадратных матриц второго порядка $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{100}$, причем произведение любых 33 матриц, следующих подряд, а также результат всего этого произведения равны матрице $A = \left(a_{ij}\right)$, причем $a_{ij} = i + j$. Найдите $\det\left(\left(X_{67}\right)^{49} + \left(X_{67}\right)^{50}\right)$.

Решение:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{100} =$

$= \left(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{33}\right) \cdot \left(X_{34} \cdot \ldots \cdot X_{66}\right) \cdot X_{67} \cdot \left(X_{68} \cdot \ldots \cdot X_{100}\right)$. Поскольку произведение любых 33 матриц, следующих подряд равно А и результат тоже А получим:

$A^2 \cdot X_{67} \cdot A = A$.

Умножив обе части полученного равенства на справа A^{-1} и на A^{-2} слева, получим $X_{67} = A^{-2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-2}$. Вычислим: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $X_{67} = \left(A^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} 25 & -18 \\ -18 & 13 \end{pmatrix}$. Вычислим определитель $\det X_{67} = \det\begin{pmatrix} 25 & -18 \\ -18 & 13 \end{pmatrix} = 1$

Теперь

$$\det\left(\left(X_{67}\right)^{49} + \left(X_{67}\right)^{50}\right) = \det\left(\left(X_{67}\right)^{49}\left(E + X_{67}\right)\right) = \det\left(\left(X_{67}\right)^{49}\right)\det\left(E + X_{67}\right) =$$

$$= \left(\det\left(X_{67}\right)\right)^{49}\det\left(E + X_{67}\right) = 1^{49} \cdot \det\begin{pmatrix} 25+1 & -18 \\ -18 & 13+1 \end{pmatrix} = 40.$$

2. Установить, существует ли невырожденная квадратная матрица A порядка 2021 с действительными элементами, такая, что $A^{101} + 2022A^T = O$, где O – нулевая матрица.

Решение:

Т.к. $A^{101} + 2022A^T = O$, то $A^{101} = -2022A^T$.

Тогда вычислим определители:

$$\left|A^{101}\right| = \left|-2022A^T\right|$$

$$\left|A^{101}\right| = (-2022)^{2021}\left|A^T\right|$$

Поскольку $|A| = \left|A^T\right|$, то получим

$\left|A^{101}\right| = (-2022)^{2021}|A|$ или

$$\left|A^{100} \cdot A\right| - (-2022)^{2021}|A| = 0.$$

Поскольку определитель произведения равен произведению определителей и определитель степени равен степени определителя, то получим

$$|A|\left(|A|^{100} - (-2022)^{2021}\right) = 0.$$

Выражение в скобках всегда положительно, тогда равенство нулю возможно только если $|A| = 0$, т.е. матрица A вырожденная.

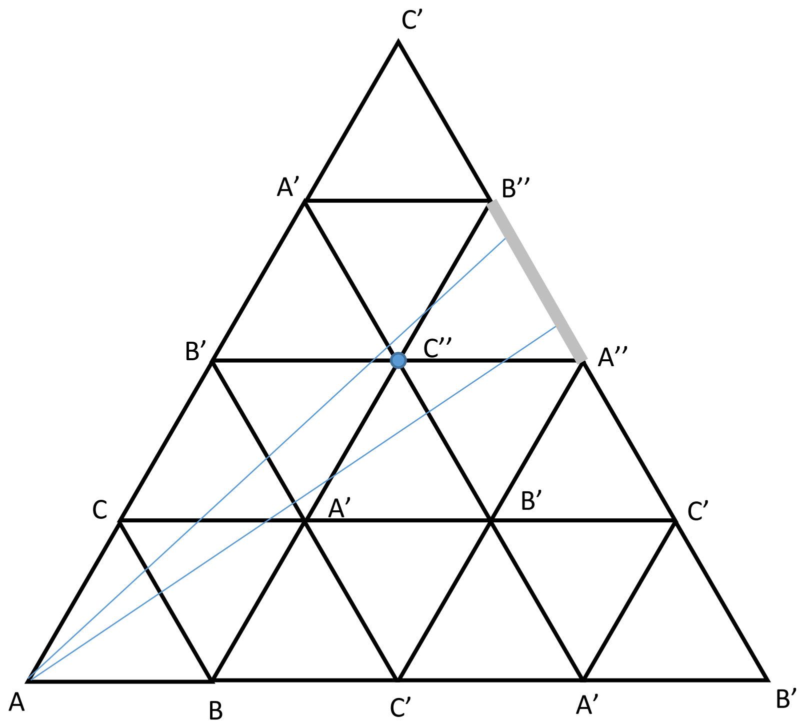
3. Задан равносторонний треугольник ABC с зеркальными сторонами. Из вершины A выходит луч под углом α к стороне AB. Найти все значения α такие что в седьмой раз луч отразится от стороны AB.

Решение:

Многократно отразим треугольник ABC симметрично относительно каждой из сторон. Тогда траектория луча станет прямолинейной. Седьмое отражение от стороны AB показано на рисунке. Тогда необходимые нам углы лежат в диапазоне $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]$, что легко получается с использованием, например теоремы Пифагора (пусть сторона большого треугольника a, тогда $AA''=\frac{a\sqrt{3}}{2}$) и из прямоугольного треугольника $AA''B''$:

$tg\varphi=\frac{A''B''}{AA''}=\frac{\frac{a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. За исключением луча, проходящего через выделенную на рисунке точку C'', для которого угол $\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{6}$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{6}\right\}$



4. Известно, что $f(x)$ определена при $x>0$ и при любых значениях переменной $f(x)>0$. Также известно, что $f(1)+f(2)=16$ и $f(a+b)=\frac{8f(a)+4f(b)}{3}-\sqrt{f(a)f(b)}$ при любых a и b. Найдите $f(2^{2021})$.

Решение:

Из $f(a+b)=\frac{8f(a)+4f(b)}{3}-\sqrt{f(a)f(b)}$ подстановкой $b=a$ получим $f(2a)=\frac{8f(a)+4f(a)}{3}-\sqrt{f(a)f(a)}=4f(a)-f(a)=3f(a)$.

Взяв $a=1$ получим $f(2)=3f(1)$, тогда $f(1)+f(2)=f(1)+3f(1)=4f(1)$, поскольку $f(1)+f(2)=16$, то тогда $4f(1)=16$ и $f(1)=4$.

Из соотношения $f(2a)=3f(a)$ с учетом $f(1)=4$ получим, что $f(2)=3f(1)=3\cdot 4$, $f(4)=f(2\cdot 2)=3\cdot 3\cdot 4=3^2\cdot 4$, …, $f(2^n)=3^n\cdot 4$.

Докажем эту формулу методом математической индукции.

1) База индукции доказана.
2) Пусть формула справедлива для $n=k-1$.
3) Докажем для $n=k$: $f(2^k)=f(2\cdot 2^{k-1})=3\cdot f(2^{k-1})=3\cdot\left(3^{k-1}\cdot 4\right)=3^k\cdot 4$.

Тогда $f(2^{2021})=3^{2021}\cdot 4$.

5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot(2^n)^{\frac{1}{2^n}}\right)$.

Решение:

Рассмотрим логарифм по основанию 2 от выражения в скобках:

$$\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot(2^n)^{\frac{1}{2^n}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}\right)=.$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+2\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Пусть $q=\frac{1}{2}$, тогда получим для данного выражения

$$S(q)=q(1+2q+\ldots+nq^{n-1})=q(q+q^2+\ldots+q^n)'$$

Выражение в скобках есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, тогда

$$S(q)=q\left(\frac{q(q^n-1)}{q-1}\right)'=q\left(\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\right)'=q\frac{((n+1)q^n-1)(q-1)-q^{n+1}+q}{(q-1)^2}=$$

$$=q\frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(q-1)^2}$$

Переходя к пределу и учитывая, что при $q=\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ получим, что

$$\lim_{n\to+\infty}S(q)=\frac{q}{(q-1)^2}.$$

При $q=\frac{1}{2}$ предел равен 2. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot(2^n)^{\frac{1}{2^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2^{\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot(2^n)^{\frac{1}{2^n}}\right)}\right)=2^2=4.$$

6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+2n-1}\right)$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)+\pi\sqrt{4n^2+2n-1}-\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\left(\sqrt{4n^2+2n-1}-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\frac{\left(\sqrt{4n^2+2n-1}-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{4n^2+2n-1}+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{4n^2+2n-1}+\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\frac{4n^2+2n-1-4n^2-2n-\frac{1}{4}}{\sqrt{4n^2+2n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos 0=1.$$

7. Доказать, что $\int_1^3 x^x dx > 7$.

Решение:

$$\int_1^3 x^x dx = \int_1^2 x^x dx + \int_2^3 x^x dx.$$

Поскольку при x>1 функция x^x строго возрастающая, то в каждом интеграле заменим степень на наименьшую для рассматриваемого диапазона изменений x, тогда

$$\int_1^2 x^x dx > \int_1^2 x^1 dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ и}$$

$$\int_2^3 x^x dx > \int_2^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

Тогда $\int_1^3 x^x dx = \int_1^2 x^x dx + \int_2^3 x^x dx > \frac{3}{2} + \frac{19}{3} = \frac{44}{6} > 7$.

8. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

Решение:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \left| \begin{array}{l} y=\frac{\pi}{2}-x, x=\frac{\pi}{2}-y \\ dx=-dy \\ x=0 \Rightarrow y=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=0 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dy}{\left(1+\operatorname{tg}^{17}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\left(1+\operatorname{ctg}^{17} y\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}+y\right)} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^{17} y}\right)\cos\left(-\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{17} y \cdot dy}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}$$

Обозначив исходный интеграл за I и записав во втором интеграле вместо y переменную x получим:

$$2I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{17} x dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17} x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right), \\ x=0\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ dt=-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx \\ dx=\frac{dt}{-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} \end{array}\right| = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{-\left(1-t^2\right)} = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\sqrt{2}-2}{-\sqrt{2}+2}\cdot\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}+2\right)^2}{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}\right|=\ln\left|\frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}\right|.$$

Тогда $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(1+\operatorname{tg}^{17}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}\right|$