

Курсы 2-5

1. Вычислить определитель $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & 0 & a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & 0 & a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b & 0 & a & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

2. Выяснить геометрический смысл равенства $\operatorname{Im} \frac{z+1}{z-i} = 0$.

3. Известно, что существуют оба экстремума функции $ax^3 + bx^2 + cx + d$ и прямая, проходящая через экстремальные точки проходит и через начало координат. Определить зависимость между коэффициентами a, b, c, d .

4. Вычислите интеграл $\int_0^{\infty} [x] \cdot e^{-x} dx$, где $[x]$ - целая часть числа x .

5. Найти предел последовательности $\sqrt{2019}, \sqrt{2019 + \sqrt{2019}}, \sqrt{2019 + \sqrt{2019 + \sqrt{2019}}}, \dots$

6. Доказать, что интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ не зависит от величины a .

7. Решите дифференциальное уравнение $y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}$.

8. Известно, что $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$. Найти $f(x)$, если $0 < x < 1$.

9. Известно, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

10. В мешке лежит 10000 монет, причем у одной из них герб с обеих сторон, а остальные монеты обычные. Наугад выбранная монета бросается 10 раз, причем при всех бросаниях она падает гербом кверху. Какова вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами?