

III Межвузовская командная олимпиада по математике (13.11.19)

1 курс

1. Вычислить определитель  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & 0 & a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & 0 & a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b & 0 & a & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ .
2. Найдите квадратную матрицу  $A$ , если  $A + A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ , а  $A^2 = E$ .
3. Найдите условия, которым должны удовлетворять числа  $a, b, c$ , чтобы система уравнений  $\begin{cases} 4x - 3y = a, \\ -5x + 4y = b, \\ 3x - 2y = c \end{cases}$  была совместной (укажите кол-во решений).
4. В треугольнике  $OAC$  проведены медиана  $OM$ , биссектриса  $OB$  и высота  $OH$ . Разложите векторы  $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{h} = \overrightarrow{OH}$  по базису  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ .
5. Найти предел последовательности  $\sqrt{2019}$ ,  $\sqrt{2019 + \sqrt{2019}}$ ,  $\sqrt{2019 + \sqrt{2019 + \sqrt{2019}}}$ , ....
6. Решите уравнение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2018}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2019}$ .
7. Найдите точку параболы  $x^2 = 2p(y + 23)$ , наименее удаленную от начала координат.
8. Известно, что существуют оба экстремума функции  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  и прямая, проходящая через экстремальные точки проходит и через начало координат. Определить зависимость между коэффициентами  $a, b, c, d$ .
9. Выяснить геометрический смысл равенства  $\operatorname{Im} \frac{z+1}{z-i} = 0$ .
10. Доказать, что функция  $y = \cos^2 x + \cos^2 \left( \frac{\pi}{3} + x \right) - \cos x \cos \left( \frac{\pi}{3} + x \right)$  есть константа. Найти ее.