Московский политех

Задания олимпиады по математике

6 ноября 2018 г.

(2-5 курсы)

1. Найти A^{100}, если: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Даны четыре комплексных числа a,b,c,d, причем $|a|=|b|=|c|=|d|=r\neq 0$. Чему равно значение выражения:
$$\left|\frac{abc+acd+abd+cbd}{a+b+c+d}\right|?$$
3. Написать уравнение прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC, зная одну из его вершин A(2; -7), а также уравнения прямых, на которых лежат высота $3x+y+11=0$ и медиана $x+2y+7=0$, проведенные из различных вершин.
4. Сколько действительных корней имеет уравнение $16x^5-15x^4+20x^3-20x^2+40x+2018=0$?
5. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $|x_1|\leq 1$ и $x_n=\sqrt{\frac{1+x_{n-1}}{2}}, n\geq 2$. Доказать, что $\{x_n\}$ сходится и найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$, если $n\in N\bigcup\{0\}$.
7. Решите дифференциальное уравнение: $\int\limits_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t}{16+9\sin^2 t}dt=\frac{\operatorname{arctg} x}{12}$.
8. Решите дифференциальное уравнение: $(y')^2+(x+a)y'-y=0$.
9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.
10. В авторалли участвуют 8 машин. Вероятность того, что машина не дойдет до финиша, равна 0,25. Найти вероятность того, что число машин, не дошедших до финиша, будет отличаться от своего математического ожидания менее чем на одно среднее квадратическое отклонение.