**Московский политех**

**Задания олимпиады по математике (1 курс)**

*6 ноября 2018 г.*

1. Найти $A^{100}$, если: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}$, где $\alpha$ и $\beta$ - корни уравнения $x^2+px+q=0$.

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1x_2^2x_3^3=2; \\ x_1^2x_2^3x_3^4=4; \\ x_1^2x_2x_3=2. \end{cases}$

4. Дан правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, вписанный в окружность единичного радиуса. B – произвольная точка окружности. Доказать, что $\sum_{k=1}^{n} BA_k^2=2n$.

5. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $|x_1|\le 1$ и $x_n=\sqrt{\frac{1+x_{n-1}}{2}}, n\ge 2$. Доказать, что $\{x_n\}$ сходится и найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\ldots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right)$

7. Написать уравнение прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC, зная одну из его вершин A(2; -7), а также уравнения прямых, на которых лежат высота $3x+y+11=0$ и медиана $x+2y+7=0$, проведенные из различных вершин.

8. Сколько действительных корней имеет уравнение
$$16x^5-15x^4+20x^3-20x^2+40x+2018=0\,?$$

9. Даны четыре комплексных числа $a,b,c,d$, причем $|a|=|b|=|c|=|d|=r\ne 0$. Чему равно значение выражения:
$$\left|\frac{abc+acd+abd+cbd}{a+b+c+d}\right|?$$

10. Дано $f(x)=\sum_{n=1}^{4}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. Найти $f'\left(\frac{\pi}{9}\right)$.