

Московский политех

Задания олимпиады по математике

21 ноября 2017 г.

1. Найти определитель матрицы A размерностью $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

2. При каком x выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - (n-1)^x}{(n+1)^{x-1} + (n+2)^{x-1}} = 21,11$?
3. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне BC взята точка M так, что $BM:MC=1:4$, на стороне DC взята точка K так, что $DK:KC=3:4$. Разложить вектор \overline{AC} по векторам \overline{AM} и \overline{AK} .
4. Сколько точек экстремума на промежутке $(0;1]$ имеет ф-ция $y = x^{\sin x}$?
5. Изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z - i| + |z + i| < 4$.
6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3|z - 12| = 5|z - 8i|; \\ |z - 4| = |z - 8|. \end{cases}$$

7. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \log_2 \left(\arcsin x + \sqrt{8^{|x|} + \arcsin^2 x} \right) dx$.

8. Решите дифференциальное уравнение: $yy' = \sqrt{y^2 + y'^2} y'' - y'y''$.

9. Решите дифференциальное уравнение: $5y''y + 5y'^2 - \frac{yy'}{x} = 0$.

10. Доказать, что $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.