

Московский политех

Задания олимпиады по математике (1 курс)

21 ноября 2017 г.

1. Найти определитель матрицы A размерностью $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$.

3. Найти корни характеристического многочлена матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Найти значения параметров a, b, c при которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} - ax^2 - bx - c \right) = 0.$$

5. При каком x выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - (n-1)^x}{(n+1)^{x-1} + (n+2)^{x-1}} = 21,11$?

6. Сколько точек экстремума на промежутке $(0;1]$ имеет ф-ция $y = x^{\sin x}$?

7. В единичный квадрат $ABCD$ вписана окружность. Найти длину вектора $\vec{m} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}$, где M – произвольная точка окружности.

8. Через вершины A, C и D_1 прямоугольного параллелипипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двухгранный угол 60° . Стороны основания равны 4 и 3 см. Найти объём параллелипипеда.